

問題……6月号 出題2

住所……

氏名…… ()

ペンネーム……風車数学

年齢……

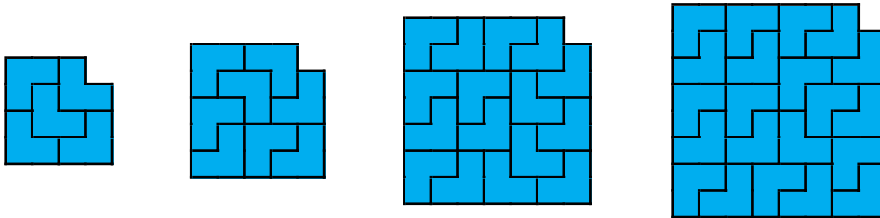
職業……

一辺の長さが n の正方形において、一つの「隅」から単位正方形を一つだけ除いた図形を R_n^\times と表す。辺の長さが m, n である長方形を $L_{m,n}$ と表す。

補題 1. 辺の長さが偶数と 3 の倍数である長方形は、L 型タイルのみで敷き詰められる。

補題 2. $R_4^\times, R_5^\times, R_7^\times, R_8^\times$ は、L 型タイルのみで敷き詰められる。

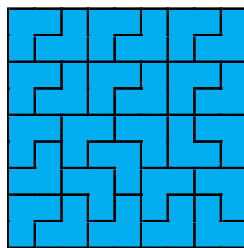
証明. 次の図による。



□

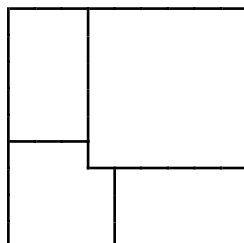
補題 3. $R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}$ は、L 型タイルと高々 1 つの S 型タイルを用いて敷き詰められる。

証明. R_7, R_8 については、補題 2 の証明中に用いた図から直ちにいえる。 R_9 は、次の図のように、L 型タイルのみで敷き詰められる：



R_{10} は、 $R_7, R_4^\times, L_{3,6}, L_{3,6}$ の 4 つに分割でき、 R_{11} は、 $R_7, R_5^\times, L_{4,6}, L_{4,6}$ の 4 つに分割できる (下図参照)。補題 1 と補題 2 より、 R_{10} と R_{11} は、L 型タイルと高々 1 つの S 型タイルを用いて敷き詰められる。

□



問題……6月号 出題2

住所……

氏名…… ()

ペンネーム……風車数学

年齢……

職業……

2

命題4. 1以上の整数 k に対して, R_{6k}, R_{6k+3} は, L型タイルのみで敷き詰められる.

証明. 補題1より, R_{6k} は, L型タイルのみで敷き詰められる. $k \geq 2$ のとき, R_{6k+3} は, $R_9, R_{6k-6}, L_{9,6k-6}, L_{9,6k-6}$ の4つに分割できる. 従って, 補題1, 補題3より, R_{6k+3} も, L型タイルのみで敷き詰められる. \square

命題5. 1以上の整数 k に対して, $R_{6k+1}, R_{6k+2}, R_{6k+4}, R_{6k+5}$ は, L型タイルと高々1つのS型タイルを用いて敷き詰められる.

証明. k に関する数学的帰納法による. $k=1$ のとき, いずれの正方形も敷き詰め可能であることが既に補題3で確かめられている. $k \geq 1$ に対して, 次の事実がいえる:

- (i) $R_{6(k+1)+1}$ は, $R_{6k+1}, R_7^\times, L_{6,6k}, L_{6,6k}$ の4つに分割できる;
- (ii) $R_{6(k+1)+2}$ は, $R_{6k+4}, R_5^\times, L_{4,6k+3}, L_{4,6k+3}$ の4つに分割できる;
- (iii) $R_{6(k+1)+4}$ は, $R_{6k+4}, R_7^\times, L_{6,6k+3}, L_{6,6k+3}$ の4つに分割できる;
- (iv) $R_{6(k+1)+5}$ は, $R_{6k+5}, R_7^\times, L_{6,6k+4}, L_{6,6k+4}$ の4つに分割できる.

これらと, 補題1, 補題2より, k 番目の敷き詰めが可能であることを仮定すれば, $k+1$ 番目の敷き詰めが可能であることがいえる. \square

解答. (1)の解答は $n \neq 3, 5$ であり, (2)の解答は $n \neq 2, 3, 4, 5$ である.

証明. 命題5, 命題6より, $n \geq 6$ のとき R_n は敷き詰め可能である. R_2 は, O型タイル1枚で敷き詰められるが, L型タイルとS型タイルでは明らかに敷き詰められない. R_3, R_5 は, それぞれ [図ア], [図イ] のように着色したとき, タイル一枚につき着色した部分は高々一つしか埋められない. 従って, R_3 を敷き詰めるにはタイルが4枚以上, R_5 を敷き詰めるにはタイルが9枚以上必要だが, 正方形の面積とタイルの面積を考えれば, これはあり得ない. R_4 は, O型タイル4枚で敷き詰められるが, L型タイルとS型タイルで敷き詰めようとする, [図ウ] または [図エ] または [図オ] で示す位置にS型タイルを敷かざるを得ない (回転と反転の違いは除く). しかし, [図ウ] のときは左上隅, [図エ] のときは右下隅, [図オ] のときは左下隅が埋められないので, R_4 は, L型タイルとS型タイルで敷き詰められない.

問題……6月号 出題2

住所……

氏名…… ()

ペンネーム……風車数学

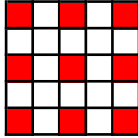
年齢……

職業……

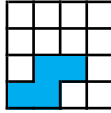
[図ア]



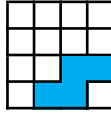
[図イ]



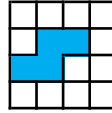
[図ウ]



[図エ]



[図オ]



□