準備（分類）．　相異なる 4 直線の位置関係を，次の 5 種類に分類する：

(I) 4 本の直線が平行である；

(II) 3 本の直線が平行で，残りの 1 本は，それらと平行でない；

(III) 2 本の直線が平行で，残りの 2 本は，それらと直交する；

(IV) 4 本の直線が 1 点で交わる；

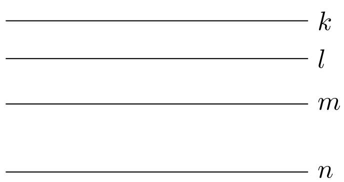
(V) 上の (I), (II), (III)，(IV) のいずれでもない．

4 本の相異なる直線 k, l, m, n に対して，これらの直線上に一つずつ頂点をもつ正方形を，k, l, m, n に対する **e-square**，または，単に **e-square** と呼ぶことにする．本レポートでは，4 本の直線の位置関係が (I)，(II)，(III) のいずれかであるときの，e-square の作図方法を示した．また，(V) の “ほとんどの場合” のとき，e-square の作図ができることを示した．

今後，平面内の 2 つの図形 α, β 間の最短距離を $d(\alpha, \beta)$ と記す．

補題 1．　4 本の平行な直線（[図ア] のように順に k, l, m, n とする）が与えられたとき，e-square が存在するならば，$d(k, l) = d(m, n)$ が成り立つ．

[図ア]



証明．　k, l, m, n に対する e-square を任意に一つとり，これを正方形 ABCD とする．正方形の 2 本の対角線 AC, BD は，互いの中点 P で交わるので，2 点 A, C は，それぞれ l, m 上に存在すると仮定しても一般性を失わない．そのように仮定すると，点 P は線分 AC の中点だから，

$$d(l, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, m)$$

である．さらに，点 P は線分 BD の中点だから，

$$d(k, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, n)$$

である．従って，$d(k, l) = d(k, \mathrm{P}) - d(l, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, n) - d(\mathrm{P}, m) = d(m, n)$ である．　□

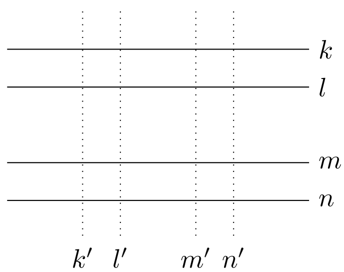
命題 2.　分類 (I) の位置関係にある 4 本の直線に対して，e-square が存在するならば，e-square が一つ作図可能である．

証明.　分類 (I) の位置関係にある 4 本の直線を順に k, l, m, n とする．これらの直線と直交する直線 k', l', m', n' を，この順に引く．ただし，

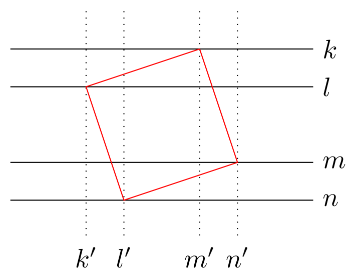
$$d(k,l) = d(k',l'),\quad d(l,m) = d(l',m'),\quad d(m,n) = d(m',n')$$

とする（[図イ]）．補題 1 より，$d(k,l) = d(m,n)$ が成り立つから，[図ウ] に示した四角形は e-square である．

[図イ]



[図ウ]



□

命題 3.　分類 (II) の位置関係にある 4 本の直線に対して，e-square が一つ作図可能である．

証明.　分類 (II) の位置関係にある 4 本の直線のうち，平行な 3 本を順に k, l, m とし，残りの 1 本を n とする．次の 3 つの条件を満たす直線 h を引く（[図エ]）：

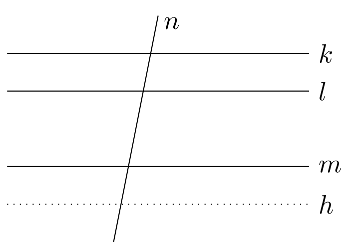
(i) $h \parallel m$；　(ii) k, l, m, h がこの順に並ぶ；　(iii) $d(k,l) = d(m,h)$.

h と直交する直線 k', l', m', h' を，[図オ] の位置に引く．ただし，

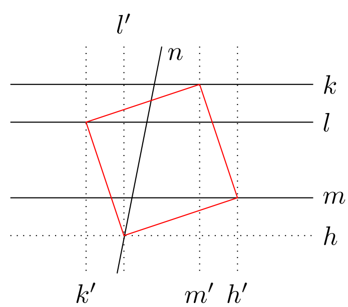
$$d(k,l) = d(k',l'),\quad d(l,m) = d(l',m'),\quad d(m,h) = d(m',h')$$

とし，l' は，n と h の交点を通る．このとき，[図オ] に示した四角形は e-square である．

[図エ]



[図オ]

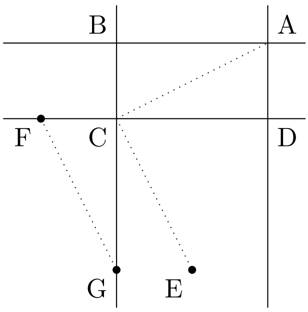


□

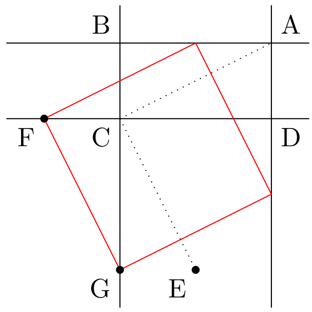
命題 4.　分類 (III) の位置関係にある 4 本の直線に対して，e-square が一つ作図可能である．

証明.　分類 (III) の位置関係にある 4 本の直線の交点を結んで，長方形 ABCD を作る．点 E を，CA = CE かつ CA ⊥ CE を満たすようにとる．さらに，線分 CE と長さが等しく，かつ平行な線分 FG を，点 F が直線 CD 上に，点 G が直線 BC 上にあるようにとる（[図カ]）．このとき，線分 FG を一辺とする e-square を作図することができる（[図キ]）．

[図カ]



[図キ]

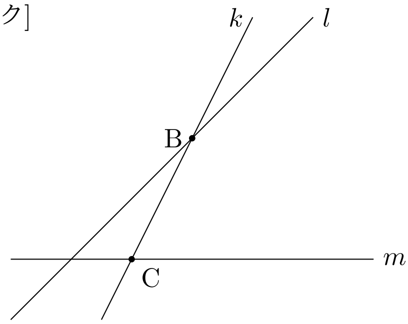


□

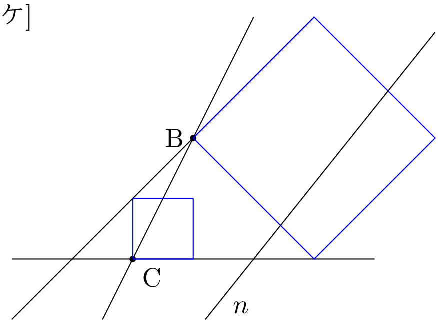
ここからは，分類 (V) の位置関係にある 4 本の直線に関して，e-square の作図方法を考える．分類の仕方から，分類 (V) の 4 本の直線からうまく 3 本 k, l, m を選べば，k, l は交点 B をもち，k, m は交点 C をもち，$\angle \mathrm{B} \neq 90^\circ, \angle \mathrm{C} \neq 90^\circ$ である（[図ク]）．[図ケ] は，残りの 1 本の直線 n と，次の条件を満たす 2 つの正方形 X, Y を作図したものである：

- 正方形 X は直線 l（Y は直線 m）と一辺を共有する；
- 正方形 X は点 B（Y は点 C）を頂点にもつ；
- 正方形 X は直線 m（Y は直線 l）上の点を頂点にもつ．

[図ク]

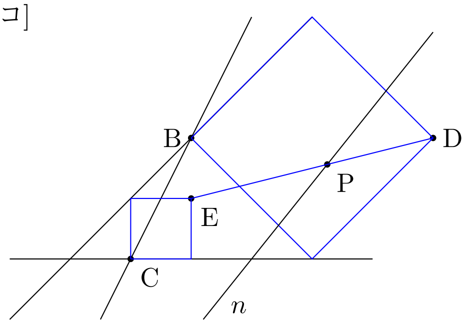


[図ケ]

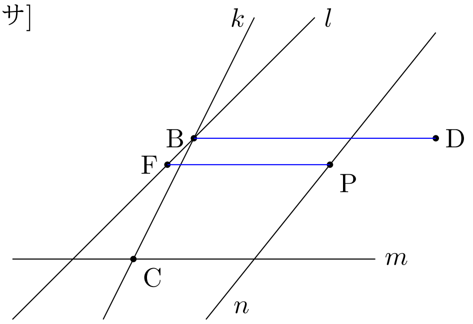


正方形 X の頂点のうち，点 B の対角の位置の点を D とし，正方形 Y の頂点のうち，点 C の対角の位置の点を E とする．直線 DE と直線 n が交わる場合，その点を P とする（[図コ]）．さらに，直線 BD と平行で点 P を通る直線と，直線 AB の交点を F とする（[図サ]）．

[図コ]

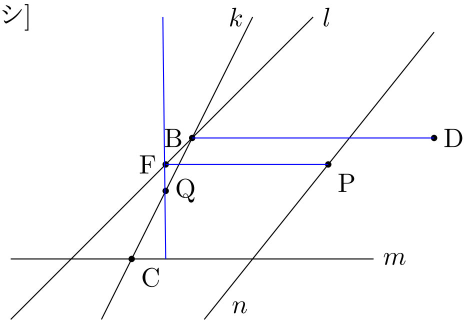


[図サ]

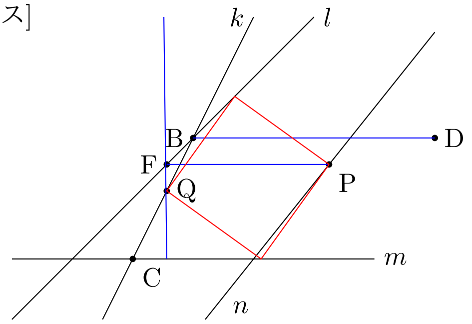


直線 FP と垂直で点 F を通る直線と，直線 BC の交点を Q とする（[図シ]）．このとき，P, Q を対角の頂点にもつ正方形は，k, l, m, n に対する e-square である（[図ス]，命題 5）．

[図シ]



[図ス]



命題 5. 分類 (V) の位置関係にある 4 本の直線に対して，[図ク] から [図シ] までで作図した点 P と点 Q は，ある e-square の対角の頂点である．

証明. 点 D のとり方から，直線 l と直線 BD のなす角は 45° である．従って，

$$\angle \mathrm{BFP} = 45^\circ \tag{1}$$

である．いま，3 点 P, F, Q を通る円 C を考える．円 C が直線 l と接するとき，(1) 式から $\angle\mathrm{FQP} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{FPQ} = 45^\circ$ が成り立つので，三角形 FPQ は直角二等辺三角形である．円 C が直線 l と 2 点で交わるとき，円 C と直線 l の交点のうち F でない方を G とする．このとき，

$$\angle \mathrm{GQP} = \angle \mathrm{GFP} = \angle \mathrm{BFP} = 45^\circ \tag{2}$$

が成り立ち，

$$\angle \mathrm{GPQ} = 180^\circ - \angle \mathrm{GFQ} = 45^\circ \tag{3}$$

が成り立つ（ただし，点 F と点 G の位置関係によっては (2) 式と (3) 式が得られる根拠が入れ替わる．結論は変わらない）．(2) 式と (3) 式から，三角形 GPQ は直角二等辺三角形である．従って，線分 PQ を斜辺とし，直線 l 上に頂点をもつ直角二等辺三角形が存在する．同様の手法で，線分 PQ を斜辺とし，直線 m 上に頂点をもつ直角二等辺三角形が存在することも示せる．従って，点 P と点 Q は，ある e-square の対角の頂点である． □

命題 5 から，分類 (V) の 4 本の直線に対して，“ほとんどの場合” は e-square を作図できることが分かる．[図コ] において，直線 DE と直線 n が平行となる場合のみが例外である．例えば，一部の等脚台形はこの例外に該当してしまう．この例外の場合に，e-square が存在するかどうか等は不明である（問題文の「e-square が存在するとき」という条件がうまく使えませんでした）．分類 (IV) に対する作図方法も不明である．