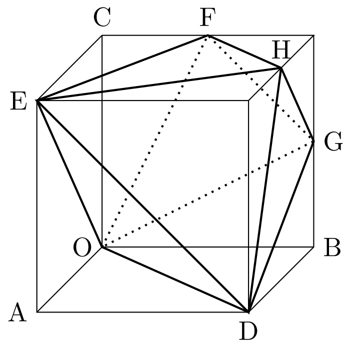
命題 1． 1 辺の長さが 1 である立方体において，下の図のように互いに隣り合わない 3 頂点を選んで O, D, E とし，それらの 3 点を含まない立方体の 3 辺の中点を F, G, H とする．このとき，八面体 ODE-FGH は，互いに直交する 3 直線の交点の両側で，交点から 1 と $\frac{1}{2}$ の点を頂点とする八面体と合同である．



証明． 次の (i),(ii),(iii) を示せばよい：

(i) 3 直線 OH, DF, EG は，互いに直交する；

(ii) 3 直線 OH, DF, EG は，1 点で交わる；

(iii) (ii) の交点は，3 線分 OH, DF, EG の長さを 1 と $\frac{1}{2}$ に分ける．

上の図の位置に 3 点 A, B, C をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．

(i) について：$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{DF}} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{EG}} = -\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ である．従って，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{DF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EG}} = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{EG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$$

が成り立つ．従って，3 直線 OH, DF, EG は，互いに直交する．

(ii) について：2 直線 DF, EG の交点を P とおく．ある実数 s, t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DF}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{EG}}$$

と表せる．これらから s, t の値を求めると，$s = \frac{2}{3}, t = \frac{2}{3}$ である．従って，

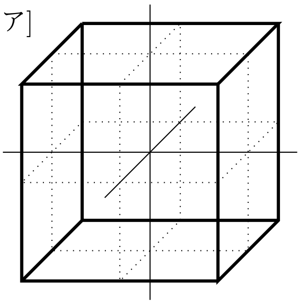
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

である．従って，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ となり，これは 3 点 O, P, H が一直線上にあることを意味する．

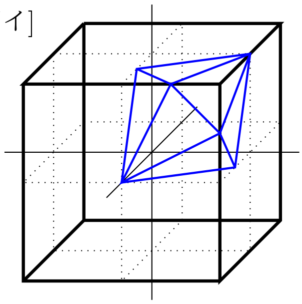
(iii) について：既に，点 P が 3 線分 OH, DF, EG を 2 : 1 に内分することが示されているので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right| = \frac{3}{2}$ であることがいえればよいが，これは (i) の証明中の基本ベクトル表示から簡単に確かめられる． □

解答. (1) は先の命題から直ちにいえる．(2) について，[図ア] のように 1 辺の長さが 2 の立方体を 8 つの区画に分割する．ここで，それぞれの区画は，1 辺の長さが 1 の立方体である．[図イ] のように「右・上・手前」の区画に十二面体を置く．さらに，[図ウ] のように「左・上・奥」の区画と「右・下・奥」の区画に十二面体を 1 個ずつ置く．

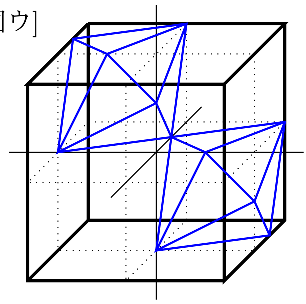
[図ア]



[図イ]

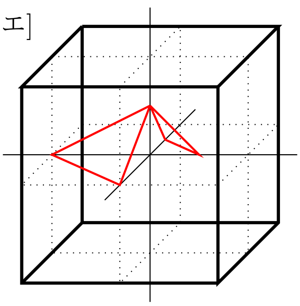


[図ウ]

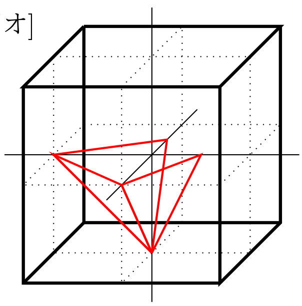


残りの 5 区画には，[図エ]，[図オ] のように八面体を 1 個ずつ置く（立体の描写は一部分のみ）．このとき，[図カ] に示した 6 点の内側に「空洞」ができる．命題 1 からこの「空洞」には八面体をちょうど収めることができる．

[図エ]



[図オ]



[図カ]