問題……2 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-

自然数 n に対して，次の条件 $A(m), B(m)$ を考える．

$A(m)$: 自然数 m に対して，n^m の 10 進表記での桁数を k とするとき，ある自然数 $M > m$ について，n^M の下 k 桁が n^m と一致する．

$B(m)$: 自然数 m に対して，n^m の 10 進表記での桁数を k とするとき，$n^M - n^m = s \cdot 10^k$ を満たす自然数 $M > m$ と自然数 s が存在する．

次の命題 1 と命題 2 は簡単なので，証明を省略する．

命題 1. 自然数 1 は，任意の自然数 m に対して条件 $A(m)$ を満たす．

命題 2. 2 以上の自然数 n に対して，2 つの条件 $A(m), B(m)$ は，互いに同値な条件である．

命題 2 を受けて，今後，2 以上の各自然数が，任意の自然数 m に対して条件 $B(m)$ を満たすかどうかを調べる．

命題 3. 10 と互いに素であるような 2 以上の自然数 n に対して，もし $B(1)$ が真であれば，任意の自然数 m に対して $B(m)$ も真である．

証明. m に関する数学的帰納法によって示す．$B(1)$ が真であることは既に仮定されている．そこで，$B(m)$ が真であることを仮定する．すなわち，$n^M - n^m = s \cdot 10^k$ を満たす自然数 $M > m, s$ の存在を仮定すると，$n^{M-m} - 1 = \frac{s \cdot 10^k}{n^m}$ である．ここで，n と 10 は互いに素であるから，

$$n^{M-m} \equiv 1 \pmod{10^k} \qquad (3.1)$$

である．一方，次のような各等式が順次得られる：

- $n^{M+1} - n^{m+1} = s \cdot n \cdot 10^k$;
- $n^{2M-m+1} - n^{M+1} = s \cdot n^{M-m+1} \cdot 10^k$;
- $n^{3M-2m+1} - n^{2M-m+1} = s \cdot n^{2M-2m+1} \cdot 10^k, \ldots$

これらの等式の辺々同士を足し合わせることで，次の (3.2) 式が得られる：

$$n^{\alpha M-(\alpha-1)m+1} - n^{m+1} = s \cdot n \cdot 10^k \cdot \sum_{i=1}^{\alpha} (n^{M-m})^{i-1} \qquad (3.2)$$

ただし，$\alpha \geq 2$ である．(3.1) より，$\alpha = 10^k$ とすれば，(3.2) 式は 10^{2k} の倍数となる．いま，n^m の桁数が k であるから，n^{m+1} の桁数は $2k$ 以下である．従って，$B(m+1)$ も真である． □

系 4. n を次の条件 (i) または (ii) のいずれか片方を満たす 2 以上 99 以下の整数とする：

(i) n は，2 の倍数であり，5 の倍数でない；

(ii) n は，5 または 25 である．

この n に対して，もし $B(1)$ が真であれば，任意の自然数 m に対して $B(m)$ も真である．

証明. n が (i) を満たすとする．以下，命題 3 の証明と同じく，m に関する数学的帰納法で示す．$n^M - n^m = s \cdot 10^k$ を満たす自然数 $M > m, s$ の存在を仮定すると，$n^{M-m} - 1 = \frac{s \cdot 10^k}{n^m}$ である．このとき，$n^{M-m} \equiv 1 \pmod{5^k}$ が成り立つ．そこで，命題 3 の証明中の (3.2) 式において，$\alpha = 2 \cdot 5^k$ とおく．このとき n は 2 の倍数であり，$\sum_{i=1}^{\alpha} (n^{M-m})^{i-1}$ は $2 \cdot 5^k$ の倍数であるから，(3.2) 式は 10^{k+2} の倍数となる．いま，n は 99 以下であるから，n^{m+1} の桁数は高々$k+2$ である．従って，$B(m)$ が真であることを仮定すれば $B(m+1)$ も真である．

n が (ii) を満たすときも，同様のアイデアによって証明できる．$n = 5$ のときは，(3.2) 式において，$\alpha = 2$ とおけば，(3.2) 式は 10^{k+1} の倍数となる．$n = 25$ のときは，(3.2) 式において，$\alpha = 2^k$ とおけば，(3.2) 式は 10^{k+2} の倍数となる． □

命題 3 と系 4 から，今回の出題 1 について次のような判定法が使える．

定理 5（判定法）. 2 以上 99 以下の自然数 n に対して，n が $15, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95$ のいずれとも等しくなければ，条件 $B(1)$ と，出題 1 で問われている性質は，互いに同値である．

証明. n が 10 の倍数でないときは，命題 3 と系 4 から直ちにいえる．n が 10 の倍数のときは，n^M の下 2 桁目が 0 になるので，n は条件 $B(1)$ も，出題 1 で問われている性質も，満たさない． □

自然数 n に対する条件 $B(1)$ の真偽を次ページにまとめた．$B(1)$ を満たすものは M の値の一つを付し（そのときの s の値は省略した），$B(1)$ を満たさないものはその理由を簡単に記した．

問題……2 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-

n	$B(1)$ の真偽	M の値	偽の理由
1	-	-	命題 1 参照.
2	真	$M=5$	-
3	真	$M=5$	-
4	真	$M=3$	-
5	真	$M=2$	-
6	真	$M=2$	-
7	真	$M=5$	-
8	真	$M=5$	-
9	真	$M=5$	-
10	偽	-	定理 5 の証明中に記した.
11	真	$M=11$	-
12	真	$M=21$	-
13	真	$M=21$	-
14	偽	-	※ 1
15	偽	-	$M \geq 2$ で，15^M の下 2 桁は，$25 \to 75 \to 25 \to \cdots$ と巡回する.
16	真	$M=6$	-
17	真	$M=21$	-
18	偽	-	※ 2
19	真	$M=21$	-
20	偽	-	定理 5 の証明中に記した.

問題……2 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-

n	$B(1)$ の真偽	M の値	偽の理由
21	真	$M=11$	-
22	偽	-	※3
23	真	$M=21$	-
24	真	$M=3$	-
25	真	$M=2$	-
26	偽	-	※4
27	真	$M=21$	-
28	真	$M=21$	-
29	真	$M=21$	-
30	偽	-	定理 5 の証明中に記した.
31	真	$M=11$	-
32	真	$M=5$	-
33	真	$M=21$	-
34	偽	-	※1
35	偽	-	$M \geq 2$ で，35^M の下 2 桁は，$25 \to 75 \to 25 \to \cdots$ と巡回する.
36	真	$M=6$	-
37	真	$M=21$	-
38	偽	-	※2
39	真	$M=21$	-
40	偽	-	定理 5 の証明中に記した.

問題……2 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……- 5

n	$B(1)$ の真偽	M の値	偽の理由
41	真	$M=6$	-
42	偽	-	※ 3
43	真	$M=5$	-
44	真	$M=11$	-
45	偽	-	$M \geq 2$ で，45^M の下 2 桁は，25 である．
46	偽	-	※ 4
47	真	$M=21$	-
48	真	$M=21$	-
49	真	$M=5$	-
50	偽	-	定理 5 の証明中に記した．
51	真	$M=3$	-
52	真	$M=21$	-
53	真	$M=21$	-
54	偽	-	※ 1
55	偽	-	$M \geq 2$ で，55^M の下 2 桁は，$25 \to 75 \to 25 \to \cdots$ と巡回する．
56	真	$M=6$	-
57	真	$M=5$	-
58	偽	-	※ 2
59	真	$M=21$	-
60	偽	-	定理 5 の証明中に記した．

問題……2 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-

n	$B(1)$ の真偽	M の値	偽の理由
61	真	$M=6$	-
62	偽	-	※ 3
63	真	$M=21$	-
64	真	$M=11$	-
65	偽	-	$M \geq 2$ で，65^M の下 2 桁は，25 である．
66	偽	-	※ 4
67	真	$M=21$	-
68	真	$M=5$	-
69	真	$M=21$	-
70	偽	-	定理 5 の証明中に記した．
71	真	$M=11$	-
72	真	$M=21$	-
73	真	$M=21$	-
74	偽	-	※ 1
75	偽	-	$M \geq 2$ で，75^M の下 2 桁は，$25 \to 75 \to 25 \to \cdots$ と巡回する．
76	真	$M=2$	-
77	真	$M=21$	-
78	偽	-	※ 2
79	真	$M=21$	-
80	偽	-	定理 5 の証明中に記した．

問題……2 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-

n	$B(1)$ の真偽	M の値	偽の理由
81	真	$M=6$	-
82	偽	-	※3
83	真	$M=21$	-
84	真	$M=11$	-
85	偽	-	$M \geq 2$ で，85^M の下 2 桁は，25 である．
86	偽	-	※4
87	真	$M=21$	-
88	真	$M=21$	-
89	真	$M=21$	-
90	偽	-	定理 5 の証明中に記した．
91	真	$M=11$	-
92	真	$M=21$	-
93	真	$M=5$	-
94	偽	-	※1
95	偽	-	$M \geq 2$ で，95^M の下 2 桁は，$25 \to 75 \to 25 \to \cdots$ と巡回する．
96	真	$M=6$	-
97	真	$M=21$	-
98	偽	-	※2
99	真	$M=5$	-
100	偽	-	$M \geq 2$ で，100^M の下 3 桁目は 0 である．
101	真	$M=11$	（定理 5 ではなく，命題 3 による）

※1　$n=14,34,54,74,94$ に対して，$B(1)$ が偽である理由について：$n=10t+4$ $(t=1,3,5,7,9)$ とおく．仮に $n^M-n=s\cdot 100$ と表せたとすると，$M=2r+1(r\geq 1)$ である．ここで，

$$n^M=(10t+4)^{2r+1}\equiv {}_{2r+1}C_1\cdot 10t\cdot 4^{2r}+4\cdot 16^r \pmod{100}$$

ここで，$4\cdot 16^r$ の下 2 桁は，$64\to 24\to 84\to 44\to 04\to 64\to\cdots$ と巡回するので，n^M の下 2 桁目は偶数である．これは n^M の下 2 桁目が奇数 t であることに反する．

※2　$n=18,38,58,78,98$ に対して，$B(1)$ が偽である理由について：$n=10t+8$ $(t=1,3,5,7,9)$ とおく．仮に $n^M-n=s\cdot 100$ と表せたとすると，$M=4r+1(r\geq 1)$ である．ここで，

$$n^M=(10t+8)^{4r+1}\equiv {}_{4r+1}C_1\cdot 10t\cdot 8^{4r}+8\cdot 4096^r \pmod{100}$$

ここで，$8\cdot 4096^r$ の下 2 桁は，$68\to 28\to 88\to 48\to 08\to 68\to\cdots$ と巡回するので，n^M の下 2 桁目は偶数である．これは n^M の下 2 桁目が奇数 t であることに反する．

※ 3　$n=22,42,62,82$ に対して，$B(1)$ が偽である理由について：$n=10t+2$ $(t=2,4,6,8)$ とおく．仮に $n^M-n=s\cdot 100$ と表せたとすると，$M=4r+1(r\geq 1)$ である．ここで，

$$n^M=(10t+2)^{4r+1}\equiv {}_{4r+1}C_1\cdot 10t\cdot 2^{4r}+2\cdot 16^r \pmod{100}$$

ここで，$2\cdot 16^r$ の下 2 桁は，$16\to 56\to 96\to 36\to 76\to 16\to\cdots$ と巡回するので，n^M の下 2 桁目は奇数である．これは n^M の下 2 桁目が偶数 t であることに反する．

※ 4　$n=26,46,66,86$ に対して，$B(1)$ が偽である理由について：$n=10t+6$ $(t=2,4,6,8)$ とおく．仮に $n^M-n=s\cdot 100$ と表せたとすると，

$$n^M=(10t+6)^M\equiv {}_MC_1\cdot 10t\cdot 6^{M-1}+6^M \pmod{100}$$

ここで，6^M $(M\geq 2)$ の下 2 桁は，$36\to 16\to 96\to 76\to 56\to 36\to\cdots$ と巡回するので，n^M の下 2 桁目は奇数である．これは n^M の下 2 桁目が偶数 t であることに反する．