問題……1 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……- 1

前提として，太郎と花子は，自分の思った通りの比率でケーキを分割することができ，なおかつ相手の分割の比率を正確に把握できるものとする．例えば，現実では，ある X がケーキをちょうど 1 : 1（半分）に分割しようと考えても，実際にそのような分割を実現することは困難であろう．よしんばある X がケーキをちょうど 1 : 1 に分割できたとしても，別の Y が，X の分割が 1 : 1 であることを確かめることは困難であろう．しかし，本レポートでは冒頭で述べた前提を採用することで，このような不確定な状況を排除し，太郎と花子が互いに完全な情報をもってケーキを分割するものとする．

補題 1. X がケーキを切って A と B に分け，Y が A または B を取り，X が残りをとるとき，お互いがケーキをできるだけ多く取るために最善を尽くすと，お互いの取り分は 1 : 1 になる．

証明. X が，$A : B = x : 1 - x$ の比でケーキを分割したとする．ただし，$0 < x < 1$ である．ここで，$0 < x \leq \frac{1}{2}$ としても一般性を失わないので，そのように仮定する．このとき，Y は B を選ぶと考えて構わない．X にとって,「自分の取り分をできるだけ多くすること」は,「Y の取り分をできるだけ少なくすること」と同値である．従って，X は，$1 - x$ が最小となるようにケーキを分割することになり，それは $x = \frac{1}{2}$ である．このとき，お互いの取り分は 1 : 1 である． □

以下，元々のケーキの大きさを 1 とする．記号 (x, y) は，ゲーム終了時に，太郎の取り分が x であり，花子の取り分が y であることを意味する．本問では，(x, y) ならば $x + y = 1$ が成り立つから，太郎と花子にとって,「自分の取り分をできるだけ多くすること」（これを**原則 1** と名付ける）は,「相手の取り分をできるだけ少なくすること」（これを**原則 2** と名付ける）と同値である．そこで，太郎と花子の選択が，常に原則 1 または原則 2 に基づいていることを確かめながら議論を進めることで，問題文における「最適性」の議論の代わりとする．

命題 2. 問題 (1) で，太郎の取り分は，$\frac{2}{3}$ に近づく．

証明. 補題 1 を踏まえれば，問題 (1) におけるプロトコルは，次の 3 つのステップから成ると考えても差し支えない：

1. 太郎が，任意の比 $A_1 : A_2 : B = y : x - y : 1 - x$ でケーキを 3 つに分割する．ただし，$0 < x < 1$ かつ $0 < y < x$ である．
2. 花子が，(i)$(1 - y, y)$，(ii)$(1 - x + y, x - y)$，(iii) ゲーム続行（ステップ 3 へ），のいずれか 1 つを選ぶ（(i) または (ii) を選択した場合はステップ 3 に移行せずゲーム終了とする）．

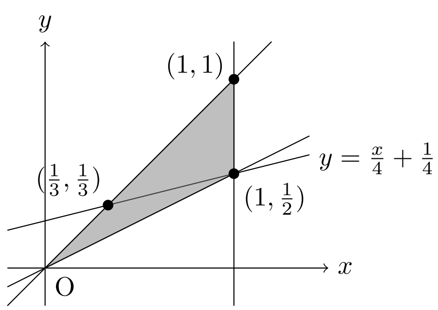
問題……1 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-

3. 太郎が，(iv)$(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+y, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y)$，(v)$(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y, \frac{1}{2}-\frac{x}{2}+y)$，のいずれか 1 つを選ぶ.

ここで，ステップ 1 での太郎の分割について，$y \geq x-y$ としても一般性を失わないので，そのように仮定する.

ステップ 2 での花子の選択について考える．(i) の花子の取り分は y であり，(ii) の花子の取り分は $x-y$ であるから，花子の選択肢から (ii) は外れると考えて構わない（原則 1 による）．ステップ 3 の太郎の取り分について，(iv) の場合は $\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+y \geq \frac{1}{2}$ であり，(v) の場合は $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y \leq \frac{1}{2}$ であるから，太郎の選択肢から (v) は外れると考えて構わない（原則 1 による）．原則 1 によれば，ステップ 2 での花子は，

- $y > \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y$ すなわち $y > \frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ が成り立つならば，(i) を選択し，
- $y < \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y$ すなわち $y < \frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ が成り立つならば，(iii) を選択し，
- $y = \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y$ すなわち $y = \frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ が成り立つならば，(i)，(iii) どちらを選択してもケーキの取り分は変わらない.



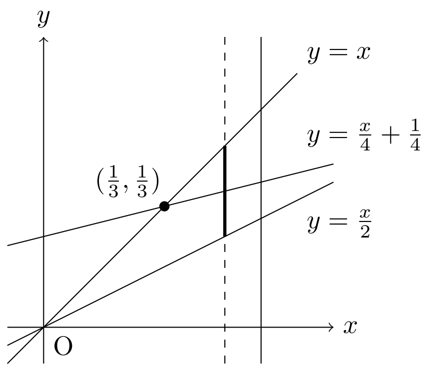
ここまでのステップ 2 での花子の選択に関する議論を踏まえて，ステップ 1 での太郎の選択について考える．左図の影の領域は，太郎がステップ 1 で選択し得る x, y の値の組を直交座標平面上に表したものである（境界は直線 $y=\frac{x}{2}$ のうち $0<x<1$ の部分のみ含む）．直線 $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ について，太郎は，直線より上の部分では y の値が小さくなるように分割した方が得であり，直線より下の部分では $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y$ の値が小さくなるように分割した方が得である（いずれも原則 2 による）．従って，ステップ 1 での太郎は，$x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$ にできるだけ近い分割をすることになる．このとき，太郎の取り分は，$\frac{2}{3}$ に近づく． □

命題 3. 問題 (2) で，太郎の取り分は，$\frac{3}{5}$ である．

証明. 補題 1 を踏まえれば，問題 (2) におけるプロトコルは，次の 4 つのステップから成ると考えても差し支えない：

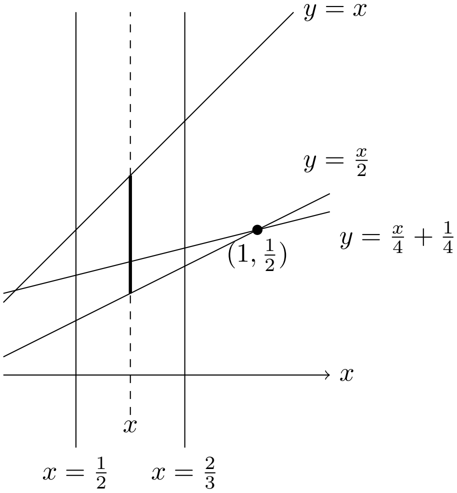
1. 花子が，任意の比 $A : B = x : 1-x$ でケーキを分割する．ただし，$0 < x < 1$ である．
2. 太郎が，(i)$(x, 1-x)$， (ii)$(1-x, x)$， (iii) 任意の比 $A_1 : A_2 = y : x-y$ でケーキ A を分割してゲーム続行（ステップ 3 へ），のいずれか 1 つを選ぶ．ただし，$0 < y < x$ である．
3. 花子が，(iv)$(1-y, y)$， (v)$(1-x+y, x-y)$， (vi) ゲーム続行（ステップ 4 へ），のいずれか 1 つを選ぶ．
4. 太郎が，(vii)$(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+y, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y)$，(viii)$(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-y, \frac{1}{2}-\frac{x}{2}+y)$，のいずれか 1 つを選ぶ．

ここで，ステップ 2 での太郎の分割について，$y \geq x-y$ としても一般性を失わないので，そのように仮定すれば，命題 2 の証明と全く同じ議論により，ステップ 3 での花子の選択肢 (v) とステップ 4 での太郎の選択肢 (viii) は除外して考えられる．ここで，命題 2 の結果から，花子は自身の取り分を $\frac{1}{3}$ 以上にできる．言いかえれば，花子は太郎の取り分を $\frac{2}{3}$ 以下にできる．従って，原則 2 によればステップ 1 での花子は $x < \frac{1}{3}$ または $\frac{2}{3} < x$ となるような分割はしない（もしそうでなければ，ステップ 2 で太郎が (i) または (ii) を適切に選ぶことで，太郎の取り分は $\frac{2}{3}$ より大きくなるためである）．そこで，ステップ 1 での x の値を，(α) $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ のときと，(β) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ のときで分けて議論を進める．



(α) $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ を満たす x を 1 つ固定する：ステップ 2 で太郎が (iii) を選ぶと仮定すると，太郎は y の値として $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ を選ぶ．なぜなら，$y \geq \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ のときは (iv) の花子の取り分 y を最小化するように，$y \leq \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ のときは (vii) の花子の取り分 $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - y$ を最小化するように太郎は行動するが（いずれも原則 2 による），左の図を踏まえれば，このとき $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ である．従って，ステップ 2 で太郎が (iii) を選ぶとき，ゲーム終了時の両者の取り分は $(-\frac{x}{4} + \frac{3}{4}, \frac{x}{4} + \frac{1}{4})$ となる．一方，$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ において，$1 - x \leq -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}$ が成り立つので，ステップ 2 で太郎は，(i) や (ii) を選ばず，(iii) を選ぶと考えてよい．

問題……1 月号 出題 1
住所……-
氏名……-（-）
ペンネーム……風車数学
年齢……-
職業……-



(β) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ を満たす x を 1 つ固定する：
左の図と原則 1 を考慮すれば，仮にステップ 2 で太郎が (iii) を選ぶとするなら，そのときの y の値は $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ であり，ゲーム終了時の両者の取り分は $(-\frac{x}{4}+\frac{3}{4}, \frac{x}{4}+\frac{1}{4})$ となる．従って，ステップ 2 での太郎は原則 1 に従って，$x \geq -\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$ ならば (i) を選択し，$x < -\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$ ならば (iii) を選択すると考えてよい．

$(\alpha), (\beta)$ より，$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ における太郎の取り分は，下のグラフのようになる．原則 2 によれば，ステップ 1 で花子は $x=\frac{3}{5}$ とするはずであり，そのときの両者の取り分は $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ である．□