出題 1 の解答. $k=\sqrt[3]{\sin\frac{1}{14}\pi}-\sqrt[3]{\sin\frac{3}{14}\pi}+\sqrt[3]{\sin\frac{5}{14}\pi}$ とするとき，$k=\sqrt[3]{-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt[3]{7}}{2}}$ であり，k^3 の最小多項式は，$4x^3+30x^2+75x-32$ である．

$\sin\frac{1}{14}\pi$, $-\sin\frac{3}{14}\pi$, $\sin\frac{5}{14}\pi$ の 3 数は，3 次方程式 $x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$ の解となっていることが分かった．本稿では，この事実を証明する（命題 2）．この事実を利用して，出題 1 における k の値を求められないかと考えたが，それには次に記す補題 1 を使えば直ちに求められることが分かった。

補題 1 ([1, p.652 Theorem]). 実数 $\alpha,-\beta,\gamma$ が $x^3-ax^2+bx-c^3=0$ の解であるとき，

$$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}=\sqrt[3]{a+6c+3t} \tag{1.1}$$

である．ここで，t は次を満たす：

$$t^3-3(ac+b+3c^2)t-(ab+6(ac^2+bc)+9c^3)=0. \tag{1.2}$$

補題 1 とその証明は，参考文献の [1] にあるものと同一である．証明は後回しにする．

命題 2. $\sin\frac{1}{14}\pi$, $-\sin\frac{3}{14}\pi$, $\sin\frac{5}{14}\pi$ を解にもつ方程式の 1 つは，$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$ である．

証明. $\cos\frac{3}{7}\pi=\sin\frac{1}{14}\pi$, $\cos\frac{5}{7}\pi=-\sin\frac{3}{14}\pi$, $\cos\frac{1}{7}\pi=\sin\frac{5}{14}\pi$ である．そこで，これらを解にもつ方程式の 1 つが，$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$ であることを確かめる:

$z^7+1=0$ の解は $e^{\frac{(2k+1)\pi}{7}i}$, $k\equiv 0,\pm1,\pm2,\pm3 \pmod 7$ である．従って，

$$\frac{z^7+1}{z+1}=0\iff z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0 \tag{1.3}$$

の解は $e^{\frac{(2k+1)\pi}{7}i}$, $k\equiv 0,\pm1,\pm2,-3 \pmod 7$ である．$z\neq 0$ において (1.3) は，

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0 \tag{1.4}$$

と変形できるので，(1.4) の解は $e^{\frac{(2k+1)\pi}{7}i}$, $k\equiv 0,\pm1,\pm2,-3 \pmod 7$ である．従って，

$$x^3-x^2-2x+1=0$$

の解は，$2\cos\frac{3}{7}\pi$, $2\cos\frac{5}{7}\pi$, $2\cos\frac{1}{7}\pi$ である．従って，$\cos\frac{3}{7}\pi$, $\cos\frac{5}{7}\pi$, $\cos\frac{1}{7}\pi$ を解にもつ方程式の 1 つは，$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$ である． □

系 3. $k=\sqrt[3]{\sin\frac{1}{14}\pi}-\sqrt[3]{\sin\frac{3}{14}\pi}+\sqrt[3]{\sin\frac{5}{14}\pi}$ とするとき，$k=\sqrt[3]{-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt[3]{7}}{2}}$ であり，k^3 の最小多項式は，$4x^3+30x^2+75x-32$ である．

証明. $\alpha=\sin\frac{1}{14}\pi$, $\beta=\sin\frac{3}{14}\pi$, $\gamma=\sin\frac{5}{14}\pi$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$ とおく．命題 2 から，$\alpha,-\beta,\gamma$ は $x^3-ax^2+bx-c^3=0$ の解である．補題 1 において，(1.2) は $t^3-\frac{7}{8}=0$ となるので，$t=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$ である．(1.1) から，$k=\sqrt[3]{-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt[3]{7}}{2}}$ を得る．さらに，$k^3+\frac{5}{2}=\frac{3\sqrt[3]{7}}{2}$ だから，両辺の立方をとって，$4k^9+30k^6+75k^3-32=0$ を得る．k^3 の最小多項式は 2 次以下にはなり得ないから，k^3 の最小多項式は，$4x^3+30x^2+75x-32$ である． □

補題 1 の証明. $\alpha,-\beta,\gamma$ を，

$$x^3-ax^2+bx-c^3=0 \tag{1.5}$$

の解とする．$\alpha\beta\gamma=-c^3$ だから，$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}=-c$ である．従って，$\sqrt[3]{\alpha},-\sqrt[3]{\beta},\sqrt[3]{\gamma}$ を解にもつ方程式の 1 つは，

$$x^3-kx^2+lx-c=0 \tag{1.6}$$

と表せる．この等式から，$x^3-c=kx^2-lx$ が分かり，両辺の立方をとって，

$$(x^3-c)^3=k^3x^6-l^3x^3-3klx^3(x^3-c) \tag{1.7}$$

を得る．(1.6) と (1.7) は，$\sqrt[3]{\alpha},-\sqrt[3]{\beta},\sqrt[3]{\gamma}$ を解にもつので，

$$(x-c)^3=k^3x^2-l^3x-3klx(x-c) \tag{1.8}$$

は，α,β,γ を解にもつ．従って，(1.5) と (1.8) の比較から，

$$a=3c+k^3-3kl,\quad b=3c^2+l^3-3ckl \tag{1.9}$$

である．$3c+t=kl$ とおけば，(1.9) の第 1 式から $k^3=a+6c+3t$ を得る．一方，(1.9) の第 2 式から $l^3=b+6c^2+3ct$ だから，

$$(3c+t)^3=(kl)^3=(a+6c+3t)(b+6c^2+3ct)$$

である．これを整理して，(1.1) および (1.2) を得る． □

参考文献

[1] B. C. Berndt and S. Bhargava, Ramanujan – For Lobrows, *The American Mathematical Monthly* **100** (1993) No.7, 644-656