$|A|=1$ のときは簡単なので証明を省く．$|A|>1$ とする．ここで，

$$A=\{a_1,\dots,a_n\},\ B=\{b_1,\dots,b_n\}$$

とする．$X\subset A\times B$ をとる．さらに，$(n+1)$ 種類の文字 $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta$ を有限個並べて（重複を許す）できる文字列全体の集合を T として，写像 $s:A\cup B\to T$ を構成する．

自然数 $i\le j(\le n)$ に対して，文字列 $u_j(a_i)$ を次のように帰納的に定める：

(i) 任意の $j=1,\dots,n$ に対して $i=j$ ならば，$u_j(a_i)=\alpha_j$ ；

(ii) 任意の $j=2,\dots,n$ に対して $i<j$ ならば，$u_j(a_i)$ は文字列 $u_{j-1}(a_i)$ の先頭及び文字と文字のあいだに α_j を付け加えたものとする．

例えば，$u_1(a_1)=\alpha_1,\ u_2(a_1)=\alpha_2\alpha_1,\ u_3(a_1)=\alpha_3\alpha_2\alpha_3\alpha_1,\ u_4(a_1)=\alpha_4\alpha_3\alpha_4\alpha_2\alpha_4\alpha_3\alpha_4\alpha_1$ といった具合である．ここで，$s(a_i)=u_n(a_i)$ と定める．

$N_i=\{j\in\mathbb{N}\mid(a_j,b_i)\in X\}$ とする．$s(b_i)$ を次のように定める：

(1) $N_i=\emptyset$ のとき，$s(b_i)=\beta$;

(2) $|N_i|=1$ のとき，$j\in N_i$ なる j に対して，$s(b_i)=\alpha_j$;

(3) $|N_i|>1$ のとき，N_i の最小の要素を j として，$j\le l\le n$ なる l に対して，$v_l(b_i)$ を次のように帰納的に定めて，$s(b_i)=v_n(b_i)$ と定める：

  (i) $l=j$ ならば，$v_l(b_i)=\alpha_j$ とする；

  (ii) $l>j$ に対して，$l\in N_i$ ならば，$v_l(b_i)$ は文字列 $v_{l-1}(b_i)$ の先頭及び文字と文字のあいだに α_l を付け加えたものとする．$l>k$ に対して，$l\notin N_i$ ならば，$v_l(b_i)$ は文字列 $v_{l-1}(b_i)$ の文字と文字のあいだに α_l を付け加えたものとする．

以下，このように定めた写像 $s:A\cup B\to T$ は，出題 2 の条件を満たすような文字列を与えることを確かめる．任意に $a_j\in A,b_i\in B$ をとる．$(a_j,b_i)\notin X$ のとき，文字列 $s(b_i)$ は，先頭から長さが 2^{n-j} の範囲には文字 α_j が含まれていない．なぜなら，文字列 $s(b_i)$ に α_j が含まれているとすれば，文字列 $v_j(b_i)$ の先頭から 2 番目が α_j となっていて，これは (3)(ii) の定め方から，文字列 $s(b_i)=v_n(b_i)$ の先頭から数えて最初に現れる α_j より前に少なくとも 2^{n-j} の長さの文字列が含まれていることを意味する．一方，文字列 $s(a_j)$ の長さは 2^{n-j} であり，最後尾の文字は α_j である．従って，$s(a_j)$ の後側と $s(b_i)$ の前側は重なりをもたない．

$(a_j,b_i)\in X$ のときを考える．$|N_i|=1$ ならば，$s(b_i)=\alpha_j$ だから，文字列 $s(a_j)$ の最後尾と重なりをもつ．$|N_i|>1$ ならば，文字列 $v_j(b_i)$ の先頭は α_j である．従って，$u_j(a_j)$ の最後尾と $v_j(b_i)$ の先頭は α_j で重なっている．従って，定め方から，$s(a_j)$ の後側と $s(b_i)$ の前側は，$s(b_i)$ の先頭から数えて最初に現れる α_j までの文字列が重なっている．　□

$s : A \times B \to T$ の定め方によれば，有限集合 A と B の要素数は必ずしも一致していなくてもよいことがわかる．また，A と B の要素数がともに n のとき，各文字列の長さを 2^{n-1} 以下にできることも示せているが，$n \geq 3$ のときは，次のように s を定めることにより，各文字列の長さを $3 \cdot 2^{n-2}$ 以下にもできると考えた．

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$，$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ とする．自然数 $i \leq j$ $(j \geq 3)$ に対して，文字列 $u_j(a_i)$ を次のように帰納的に定める：

(i) $u_3(a_1) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$，$u_3(a_2) = \alpha_2\alpha_3\alpha_1$，$u_3(a_3) = \alpha_3\alpha_1\alpha_2$

(ii) 任意の $j = 4, \ldots, n$ に対して $i = j$ ならば，$u_j(a_i) = \alpha_j$ ；

(iii) 任意の $j = 4, \ldots, n$ に対して $i < j$ ならば，$u_j(a_i)$ は文字列 $u_{j-1}(a_i)$ の先頭及び文字と文字のあいだに α_j を付け加えたものとする．

ここで，$s(a_i) = u_n(a_i)$ と定める．また，$s(b_i)$ の定め方は，先の定め方に倣う．このとき，s は出題 2 の性質を満たす文字列を与えることが分かる（煩雑なので説明は省く）．さらに，その各文字列の長さは $3 \cdot 2^{n-2}$ 以下である．