出題 1 の解答. $x>0$ で微分可能で，すべての $x,y>0$ に対して

$$f(x)-f(y)=f'(\sqrt{xy})(x-y) \tag{1}$$

を満たす関数 $f(x)$ は，$f(x)=\frac{a}{x}+bx+c$ である．ここで $a,b,c\in\mathbb{R}$ である．

証明. (1) を満たす関数 $f(x)$ に対して，$f(x)+c$ も (1) を満たす．ここで c は定数である．そこで，$f(1)=0$ として考える．(1) において，$y=1$ とすると，次の等式を得る：

$$f(x)=f'(\sqrt{x})(x-1). \tag{2}$$

(1) と (2) から，次の等式を得る：

$$f'(\sqrt{x})(x-1)-f'(\sqrt{y})(y-1)=f'(\sqrt{xy})(x-y). \tag{3}$$

(3) を満たす関数 $f'(x)$ に対して，$f'(x)+c$ も (3) を満たすので，やはり $f'(1)=0$ として考えても一般性を失わない．(3) において，$y=\frac{1}{x}$ とすると，次の等式を得る：

$$f'(\sqrt{x})(x-1)=f'\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right). \tag{4}$$

(3) と (4) から，

$$\begin{aligned} f'(\sqrt{xy})(x-y) &= f'(\sqrt{x})(x-1)-f'\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) \\ &= f'\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\left(x-\frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

が成り立つが，この等式の両辺を x 倍することで，次の等式を得る：

$$f'(\sqrt{xy})(x^2-xy)=f'\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\left(x^2-\frac{x}{y}\right). \tag{5}$$

$s=xy, t=\frac{x}{y}$ とおけば，s,t は正の実数全体を独立に動き，(5) は次のように置き換えられる：$f'(\sqrt{s})(st-s)=f'(\sqrt{t})(st-t)$. 従って，$x\neq y$ (すなわち $t\neq 1$) のとき，

$$f'(\sqrt{s})=\tfrac{t}{t-1}f'(\sqrt{t})-\tfrac{t}{t-1}f'(\sqrt{t})\tfrac{1}{s}$$

が成り立つから，定数 a を用いて，$f'(\sqrt{x})=-\frac{a}{x}+a$ と表せる．仮定 $f'(1)=0$ を外せば，定数 b を用いて $f'(\sqrt{x})=-\frac{a}{x}+b$ となる．これを (2) の右辺に代入して，$f(x)=\frac{a}{x}+bx-a-b$ を得る．仮定 $f(1)=0$ を外せば，定数 c を用いて $f(x)=\frac{a}{x}+bx+c$ となる．

逆に $f(x)=\frac{a}{x}+bx+c$ はすべての $x,y>0$ に対して (1) を満たしていることが確かめられる． □