$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．正の整数 n に対して，$x \in \mathbb{Z}$ に自然に対応する商集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元を $x + n\mathbb{Z}$ と記すが，混同の恐れのないときは $\overline{x}$ と略記する．

補題 1.　任意の 5 個の整数の中から，和が 3 の倍数になるような 3 個の整数を選ぶことができる．

証明.　任意の 5 個の整数を，3 で割った剰余が小さい順に，a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とする．$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5})$ とする．ここで，各 $\overline{a_i}$（$1 \leq i \leq 5$）は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元である．$\overline{a_l} = \overline{a_m} = \overline{a_n}$ が成り立つような互いに相異なる $l, m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ が存在するならば，

$$\overline{a_l + a_m + a_n} = \overline{a_l} + \overline{a_m} + \overline{a_n} = \overline{a_l} + \overline{a_l} + \overline{a_l} = \overline{3a_l} = \overline{0}$$

であり，$a_l + a_m + a_n$ は 3 の倍数である．そうでなければ，A は次のいずれかである:

(i) $A = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{2})$;

(ii) $A = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$;

(iii) $A = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$.

しかし，$\overline{0} + \overline{1} + \overline{2} = \overline{0}$ である故，いずれの場合も適当な $l, m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して，$a_l + a_m + a_n$ は 3 の倍数である．

命題 2.　任意の 17 個の整数の中から，和が 9 の倍数になるような 9 個の整数を選ぶことができる．

証明.　17 個の整数 a_i（$1 \leq i \leq 17$）に対して，補題 1 を繰り返し適用すれば，和が 3 の倍数になるような 3 個の整数の組を，5 組選ぶことができる．a_i の添え字を付け替えて，これらの 5 組をそれぞれ $A_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,3})$（$1 \leq j \leq 5$）と定める．さらに，

$$b_j = a_{j,1} + a_{j,2} + a_{j,3}\ (1 \leq j \leq 5)$$

と定めると，各 b_j は 3 の倍数だから，各 $\frac{b_j}{3}$ は整数である．再び補題 1 を用いると，$\frac{b_l}{3} + \frac{b_m}{3} + \frac{b_n}{3}$ が 3 の倍数となるような $l, m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ が存在する．従って，$b_l + b_m + b_n$ は 9 の倍数である．従って，

$$a_{l,1} + a_{l,2} + a_{l,3} + a_{m,1} + a_{m,2} + a_{m,3} + a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} \in 9\mathbb{Z}$$

を得る．これは，和が 9 の倍数になるような 9 個の整数が選べることを意味する．

出題 1 の解答.　できない（命題 2 による）．